

Teorema do Transporte Cinemático

LUÃ G. COSTA

Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE/Poli – Engenharia Mecânica
lgcosta@mecanica.coppe.ufrj.br

Abril de 2026

Neste documento, trataremos da diferenciação de vetores descritos em diferentes referenciais. Considere, portanto, dois referenciais, denominados I (inercial) e S (móvel), sendo que S encontra-se em rotação em relação a I . Com isso, adota-se a seguinte notação:

$$\begin{aligned} {}_S\mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{u} \text{ descrito na base } S; \\ {}_I\mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{u} \text{ descrito na base } I. \end{aligned}$$

Seja \mathbf{T} a matriz ortogonal de transformação de coordenadas que leva a descrição de um vetor na base I para a base S , as seguintes relações de transformação podem ser estabelecidas:

$${}_S\mathbf{u} = \mathbf{T} \cdot {}_I\mathbf{u}, \quad (1)$$

$${}_I\mathbf{u} = \mathbf{T}^T \cdot {}_S\mathbf{u}. \quad (2)$$

Derivação na Base Móvel (Vista do Referencial Inercial)

Suponha agora que desejamos determinar a derivada temporal de ${}_I\mathbf{u}$, mas conhecemos apenas sua descrição na base S , isto é, ${}_S\mathbf{u}$. Para isso, diferenciamos a Equação 2:

$$\frac{d}{dt}({}_I\mathbf{u}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T \cdot {}_S\mathbf{u}). \quad (3)$$

A expressão acima implica que o lado esquerdo está sendo diferenciado em relação à base I , enquanto o lado direito está sendo diferenciado em relação à base S . De forma mais explícita:

$${}_I\left[\frac{d}{dt}({}_I\mathbf{u})\right] = {}_S\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T \cdot {}_S\mathbf{u})\right]. \quad (4)$$

Para simplificar a notação, omitiremos temporariamente essa distinção explícita. Aplicando a regra do produto ao lado direito, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}({}_I\mathbf{u}) = \mathbf{T}^T \cdot \frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T) \cdot {}_S\mathbf{u}. \quad (5)$$

Multiplica-se a Equação 5 por \mathbf{T} à esquerda, em ambos os lados da equação, resultando no seguinte:

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{u}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u}) + \mathbf{T} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T) \cdot {}_S\mathbf{u} \quad (6)$$

Utilizando a Equação 1, transforma-se a descrição baseada em I do lado esquerdo da Equação 6, em uma descrição baseada em S . Além disso, utiliza-se a propriedade de ortogonalidade da matriz transformação de coordenadas ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$), resultando no seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u}) &= \mathbf{I} \cdot \frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u}) + \mathbf{T} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{T}^T) \cdot {}_S\mathbf{u}; \\ \frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u}) &= \frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u}) + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T \cdot {}_S\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (7)$$

Reintroduzindo a notação explícita das derivadas em diferentes referenciais, podemos escrever a Equação 7 da seguinte forma:

$${}_I\left[\frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u})\right] = {}_S\left[\frac{d}{dt}({}_S\mathbf{u})\right] + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T \cdot {}_S\mathbf{u}. \quad (8)$$

A equação acima pode ser interpretada da seguinte forma: a derivada temporal de um vetor \mathbf{u} , descrito na base móvel S , quando observada a partir do referencial fixo I , é composta por dois termos. O primeiro corresponde à variação do vetor medida no próprio referencial móvel. O segundo está associado à rotação do referencial S em relação a I , sendo responsável pela variação adicional induzida pela mudança de base.

Para interpretar esse termo, expandimos $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T$ em notação de índices:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T &= T_{ij} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{T}_{lk} \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= T_{ij} \dot{T}_{lk} (\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l) \\ &= T_{ij} \dot{T}_{lk} \delta_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= T_{ik} \dot{T}_{lk} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_l. \end{aligned} \quad (9)$$

Com isso, $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T$ é um tensor de segunda ordem, definido na base S . Como ele relaciona a variação observada em I com quantidades descritas em S , introduzimos a seguinte notação:

$${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T. \quad (10)$$

Isto é, ${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S$ é um tensor descrito na base S , que relaciona a base S visto de I .

Matrizes de transformação de coordenadas representam rotações. Assim, podemos interpretar ${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S$ analisando rotações elementares em torno dos eixos coordenados. Considerando três rotações independentes, obtêm-se tensores associados às taxas de variação angulares (velocidades angulares) elementares.

$${}^I_S \boldsymbol{\Omega}_{\theta_1}^S = \mathbf{T}_{\theta_1} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\theta_1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) & -\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \\ 0 & \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) & -\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_1 \\ 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$${}^I_S \boldsymbol{\Omega}_{\theta_2}^S = \mathbf{T}_{\theta_2} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\theta_2}^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) & 0 & \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) & 0 & -\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$${}^I_S \boldsymbol{\Omega}_{\theta_3}^S = \mathbf{T}_{\theta_3} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\theta_3}^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & 0 \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) & -\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) & 0 \\ \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) & -\dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & 0 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Observa-se que esses tensores possuem estrutura antissimétrica e estão diretamente associados às componentes da velocidade angular. Pela propriedade de aditividade das rotações infinitesimais, pode-se compor um único tensor $\boldsymbol{\Omega}$ associado a todas as rotações:

$${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S = {}^I_S \boldsymbol{\Omega}_{\theta_1}^S + {}^I_S \boldsymbol{\Omega}_{\theta_2}^S + {}^I_S \boldsymbol{\Omega}_{\theta_3}^S = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

O tensor resultante descrito na equação acima também é um tensor antissimétrico ($\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$) e é conhecido como **Tensor Rotações Infinitesimais**. Com isso, é possível reescrever a Equação 8 da seguinte forma:

$${}_I \left[\frac{d}{dt} ({}_S \mathbf{u}) \right] = {}_S \left[\frac{d}{dt} ({}_S \mathbf{u}) \right] + {}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S \cdot {}_S \mathbf{u}. \quad (15)$$

Foca-se agora na análise do termo ${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S \cdot {}_S \mathbf{u}$. Para isso, expande-se a expressão, tal que:

$${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S \cdot {}_S \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_3 \omega_2 - u_2 \omega_3 \\ u_1 \omega_3 - u_3 \omega_1 \\ u_2 \omega_1 - u_1 \omega_2 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Este resultado é característico de um produto vetorial. Adicionalmente, nota-se que o tensor ${}^I_S \boldsymbol{\Omega}^S$ é composto por três componentes distintas, que representam as velocidades angulares nas

três direções. Com isso, é possível definir um vetor velocidade angular composto por essas três componentes de forma que:

$${}^I_S\boldsymbol{\omega}^S = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Relaciona-se ${}^I_S\boldsymbol{\omega}^S$ com o vetor ${}_S\mathbf{u}$ através do produto vetorial:

$${}^I_S\boldsymbol{\omega}^S \times {}_S\mathbf{u} = \epsilon_{ijk} {}^I_S\omega_i^S {}_S u_j \hat{\mathbf{e}}_k = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_3\omega_2 - u_2\omega_3 \\ u_1\omega_3 - u_3\omega_1 \\ u_2\omega_1 - u_1\omega_2 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Dessa forma, prova-se que ${}^I_S\boldsymbol{\Omega}^S \cdot {}_S\mathbf{u} = {}^I_S\boldsymbol{\omega}^S \times {}_S\mathbf{u}$, permitindo escrever a forma final do **Teorema do Transporte Cinemático**:

$${}_I \left[\frac{d}{dt} ({}_S\mathbf{u}) \right] = {}_S \left[\frac{d}{dt} ({}_S\mathbf{u}) \right] + {}^I_S\boldsymbol{\omega}^S \times {}_S\mathbf{u}. \quad (19)$$

Em síntese, o teorema do transporte cinemático estabelece que a derivada temporal de um vetor descrito em um referencial móvel, quando observada a partir de um referencial fixo, é igual à soma da derivada medida no referencial móvel, com um termo adicional associado à rotação relativa entre os referenciais

Derivação na Base Inercial (Vista do Referencial Móvel)

Agora, repetimos a dedução do teorema do transporte cinemático, mas tomando a Equação 1 como ponto de partida. O objetivo é obter a expressão da derivada de um vetor descrito na base fixa I , quando observado a partir do referencial móvel S . Desta vez, conduzimos a dedução de forma mais direta:

$${}_S \left[\frac{d}{dt} ({}_S\mathbf{u}) \right] = {}_I \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{T} \cdot {}_I\mathbf{u}) \right] \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_S\mathbf{u}) = \mathbf{T} \cdot \frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}) \cdot {}_I\mathbf{u} \quad (21)$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \frac{d}{dt} ({}_S\mathbf{u}) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) + \mathbf{T}^T \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{T}) \cdot {}_I\mathbf{u} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) = \mathbf{I} \cdot \frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) + \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot {}_I\mathbf{u} \quad (23)$$

$${}_S \left[\frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) \right] = {}_I \left[\frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) \right] + \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot {}_I\mathbf{u}. \quad (24)$$

Surge, portanto, um novo tensor de segunda ordem análogo ao obtido anteriormente. Como agora a análise é feita do ponto de vista oposto, isto é, observando o referencial fixo a partir do referencial móvel, definimos:

$${}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I = \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}}. \quad (25)$$

Isto é, ${}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I$ é um tensor descrito na base I , que representa a rotação aparente do referencial I , quando observado a partir de S .

De maneira análoga ao caso anterior, esse tensor pode ser descrito em termos das rotações elementares em torno de cada direção coordenada:

$$\begin{aligned} {}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I &= {}^S_I\boldsymbol{\Omega}_{\theta_1}^I + {}^S_I\boldsymbol{\Omega}_{\theta_2}^I + {}^S_I\boldsymbol{\Omega}_{\theta_3}^I \\ &= \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\theta_1} + \mathbf{T}_{\theta_2}^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\theta_2} + \mathbf{T}_{\theta_3}^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\theta_3} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_3 & 0 \\ -\dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ {}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_3 & -\dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_3 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow {}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

Expandindo o produto ${}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I \cdot {}_I\mathbf{u}$, obtém-se:

$${}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I \cdot {}_I\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -U_3\omega_2 + U_2\omega_3 \\ -U_1\omega_3 + U_3\omega_1 \\ -U_2\omega_1 + U_1\omega_2 \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

Comparando esse resultado com a forma do produto vetorial descrito na Equação 16, e considerando o vetor velocidade angular ${}^S_I\boldsymbol{\omega}^I$, conclui-se que:

$${}^S_I\boldsymbol{\Omega}^I \cdot {}_I\mathbf{u} = -{}^S_I\boldsymbol{\omega}^I \times {}_I\mathbf{u}. \quad (28)$$

Dessa forma, a Equação 24 pode ser reescrita:

$$\boxed{{}_S \left[\frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) \right]} = \boxed{{}_I \left[\frac{d}{dt} ({}_I\mathbf{u}) \right]} - {}^S_I\boldsymbol{\omega}^I \times {}_I\mathbf{u}. \quad (29)$$

A diferença de sinal em relação à formulação anterior possui interpretação física direta: se o referencial S gira em relação a I , então, quando essa rotação é observada a partir do próprio referencial móvel S , o movimento aparente do referencial I ocorre no sentido oposto.

Com isso, fundamentalmente, pode-se concluir que a velocidade angular relativa entre dois referenciais muda de sinal quando se inverte o ponto de vista. Isto é um conceito intuitivo e pode ser testado experimentalmente com certa facilidade. Dessa forma, estabelece-se a relação:

$${}^S_I\boldsymbol{\omega}^I = -{}_I^S\boldsymbol{\omega}^S. \quad (30)$$

Isso mostra que ambas as expressões podem ser interpretadas como manifestações de um mesmo princípio: a variação temporal de um vetor depende não apenas de sua variação intrínseca, mas também da rotação do referencial no qual ele está sendo descrito.

Em vista da Equação 30, é possível reescrever o teorema do transporte cinemático em sua forma geral para dois referenciais genéricos, A e B :

$$\boxed{{}_B \left[\frac{d}{dt} ({}_A\mathbf{u}) \right]} = \boxed{{}_A \left[\frac{d}{dt} ({}_A\mathbf{u}) \right]} + {}^B_A\boldsymbol{\omega}^A \times {}_A\mathbf{u}. \quad (31)$$

Portanto, o teorema do transporte cinemático possui uma estrutura intrinsecamente simétrica. Ao trocar os referenciais de observação, mantém-se a forma da equação, alterando-se apenas o sinal da velocidade angular. Essa propriedade reforça a interpretação geométrica do termo rotacional como consequência direta da rotação relativa entre os referenciais.

Estrutura dos Tensores Rotação

Nesta seção, aprofunda-se a análise da estrutura dos tensores de rotação infinitesimal. Até o momento, foram obtidas duas representações análogas:

$${}_I^S\boldsymbol{\Omega}^S = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T; \quad (32)$$

$${}_I^S\boldsymbol{\Omega}^I = \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}}. \quad (33)$$

Entretanto, ainda restam duas representações a serem determinadas: ${}_I^S\boldsymbol{\Omega}^S$ e ${}_S^I\boldsymbol{\Omega}^I$. Esses correspondem aos mesmos tensores, porém descritos em bases distintas.

Para obtê-los, transformações de base são conduzidas. No caso de tensores de segunda ordem, a mudança de base é efetuada por meio de multiplicação à esquerda e à direita pela matriz de transformação apropriada.

Inicialmente, considera-se o tensor definido na Equação 32, e realiza-se uma transformação de coordenadas da base S para a base I :

$$\begin{aligned} {}_I^S\boldsymbol{\Omega}^S &= \mathbf{T}^T \cdot {}_S^I\boldsymbol{\Omega}^S \cdot \mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T} \\ &= \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (34)$$

$${}_I^S\boldsymbol{\Omega}^S = \dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T} \quad \longrightarrow \quad {}_I^I\boldsymbol{\Omega}^S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, opera-se o tensor da Equação 33, realizando uma transformação de coordenadas da base I para a base S :

$$\begin{aligned}
{}^S_S\Omega^I &= \mathbf{T} \cdot {}^S_I\Omega^I \cdot \mathbf{T}^T \\
&= \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T \\
&= \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T \\
{}^S_S\Omega^I &= \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T \quad \longrightarrow \quad {}^S_S\Omega^I = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Esses resultados mostram que, embora as representações matriciais dependam da base escolhida, a estrutura antissimétrica do tensor de rotações é preservada. Observa-se, em particular, que os tensores associados a uma mesma rotação mantêm suas propriedades geométricas fundamentais invariantes, mesmo quando expressos em bases distintas.

Dessa forma, é possível resumir os resultados obtidos nas seguintes expressões:

$$\boxed{{}^I_I\Omega^S = {}^I_S\Omega^S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T = \dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T};} \tag{36}$$

$$\boxed{{}^S_I\Omega^I = {}^S_S\Omega^I = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T.} \tag{37}$$

Por fim, a anti-simetria desses tensores pode ser provada da partindo da ortogonalidade da matriz transformação de coordenadas:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}. \tag{38}$$

Pode-se dividir essa expressão em dois componentes: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ e $\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$. Derivando o primeiro componente:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T) = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}) \tag{39}$$

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T = \mathbf{0} \tag{40}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T = -(\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T)^T} \longleftarrow \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T = -\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T \longrightarrow \boxed{\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T = -(\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}}^T)^T}. \tag{41}$$

Derivando, agora, o segundo componente:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}) \tag{42}$$

$$\dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \tag{43}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T} = -(\dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T})^T} \longleftarrow \dot{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}} = -(\mathbf{T}^T \cdot \dot{\mathbf{T}})^T}. \tag{44}$$

Portanto, visto que um tensor antissimétrico é definido por $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, prova-se que os tensores de rotação infinitesimal são antissimétricos através das Equações 41 e 44.