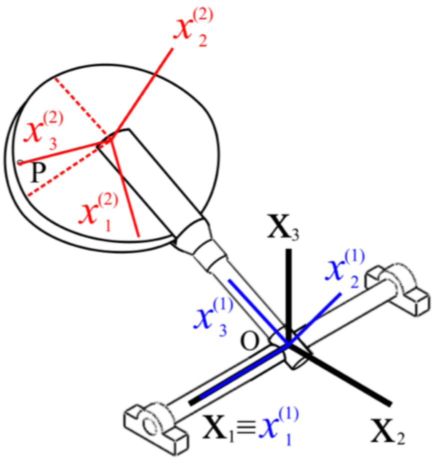
In[ ]:= Quit[]

In[1]:= (* Sistema Tipo 1-2 *)



;

```
(* Referenciais
  - I (X_i): Inercial (fixo)
  - S1 (x_i^(1)): Móvel 1 (solidário à haste)
  - S2 (x_i^(2)): Móvel 2 (solidário ao disco)
*)
```

In[2]:= (* Matrizes de Transformação *)

$$T\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}[\beta[t]] & \text{Sin}[\beta[t]] \\ 0 & -\text{Sin}[\beta[t]] & \text{Cos}[\beta[t]] \end{pmatrix};$$

$$T\theta = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta[t]] & 0 & -\text{Sin}[\theta[t]] \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{Sin}[\theta[t]] & 0 & \text{Cos}[\theta[t]] \end{pmatrix};$$

In[4]:= (* Por conveniência, utiliza-se a base S1 para os cálculos *)

(* Velocidades Angulares *)

(* Para determinar S1ωIS2, decompõe-se o vetor em partes mais simples: *)

$$ {}^{I}_{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} = {}^{I}_{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \;; $$

```
S1ωIS1 = {β'[t], 0, 0}
(* Velocidade angular de S1 em relação a I descrito na base S1 *)
S1ωS1S2 = {0, θ'[t], 0}
(* Velocidade angular de S2 em relação a S1 descrito na base S1 *)
S1ωIS2 = S1ωIS1 + S1ωS1S2
  (* Velocidade angular de S2 em relação a I descrito na base S1 *)
```

Out[5]= {β′[t], 0, 0}

Out[6]= {0, θ′[t], 0}

Out[7]= {β′[t], θ′[t], 0}

In[8]:=
```
(* Acelerações Angulares *)
(* Para determinar as acelerações angulares,
considera-se a forma geral da expressão: *)
```

$$ {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\square} = {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\bigstar} + {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\square} \text{ ;} $$

```
(* Dessa forma, para determinar S1αIS2, faz-se: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = {}^{I}_{S_1}\boldsymbol{\alpha}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_1}\boldsymbol{\alpha}^{S_2} + {}^{I}_{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times {}^{S_1}_{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \text{ ;} $$

```
S1αIS1 = {β''[t], 0, 0}
(* Aceleração angular de S1 em relação a I descrito na base S1 *)
S1αS1S2 = {0, θ''[t], 0}
(* Aceleração angular de S2 em relação a S1 descrito na base S1 *)
S1αIS2 = S1αIS1 + S1αS1S2 + Cross[S1ωIS1, S1ωS1S2]
  (* Aceleração angular de S2 em relação a I descrito na base S1 *)
```

Out[10]=

$\{\beta''[t], 0, 0\}$

Out[11]=

$\{0, \theta''[t], 0\}$

Out[12]=

$\{\beta''[t], \theta''[t], \beta'[t]\,\theta'[t]\}$

In[13]:=
```
(* Cálculo do Vetor Posição Absoluta de P *)
(* Para calcular o vetor posição absoluta,
decompõe-se o vetor em vetores mais simples: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\mathbf{p}^{P} = {}^{I}_{S_1}\mathbf{p}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2} + {}^{S_2}_{S_1}\mathbf{p}^{P} \; ; $$

```
S1pIS1 = {0, 0, 0} (* Vetor posição de S1 em relação a I, descrito na base S2 *)
S1pS1S2 = {0, 0, L} (* Vetor posição de S2 em relação a S1,
descrito na base S1 *)
S2pS2P = {0, 0, R} (* Vetor posição de P em relação a S2, descrito na base S2 *)
S1pS2P = Transpose[Tθ].S2pS2P
(* Vetor posição de P em relação a S2, descrito na base S1 *)
S1pIP = S1pIS1 + S1pS1S2 + S1pS2P
(* Vetor posição absoluta de P, descrito na base S1 *)
(* É possível determinar certos vetores intermediários, de forma que: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2} = {}^{I}_{S_1}\mathbf{p}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2} \; ; $$

```
S1pIS2 =
 S1pIS1 + S1pS1S2 (* Vetor posição de S2 em relação a I, descrito na base S2 *)
```

Out[14]=
```
{0, 0, 0}
```

Out[15]=
```
{0, 0, L}
```

Out[16]=
```
{0, 0, R}
```

Out[17]=
```
{R Sin[θ[t]], 0, R Cos[θ[t]]}
```

Out[18]=
```
{R Sin[θ[t]], 0, L + R Cos[θ[t]]}
```

Out[20]=
```
{0, 0, L}
```

In[21]:=
```
(* Vetor Velocidade Absoluta de P *)
(* Em casos envolvendo mais de 1 referncial móvel,
é necessário aplicar o teorema cinemático de forma
 recursiva para determinar todos os termos. Com isso,
é possível escrever o teorema cinemático para velocidade da seguinte
 forma genérica: *)
```

$$ {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} = {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\bigstar} + {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\omega^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{p}^{\square} \; ; $$

```
(* Para achar S1vIP, escolhe-se utilizar o referencial S_2 no teorema,
isto é, * = S_2. Resultando na seguinte forma: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\mathbf{v}^{P} = {}^{I}_{S_1}\mathbf{v}^{S_2} + {}^{S_2}_{S_1}\mathbf{v}^{P} + {}^{I}_{S_1}\omega^{S_2} \times {}^{S_2}_{S_1}\mathbf{p}^{P} \; ; $$

```
(* Porém, para achar S1vIS2, o primeiro termo da equação acima,
é preciso aplicar novamente o teorema cinemático. Utilizando agora o
 referencial S_1 para tal, isto é * = S_1, resulta na seguinte forma: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\mathbf{v}^{S_2} = {}^{I}_{S_1}\mathbf{v}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_1}\mathbf{v}^{S_2} + {}^{I}_{S_1}\omega^{S_1} \times {}^{I}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2} \; ; $$

```
(* Com isso, definem-se os termos necessários para o cálculo: *)
S1vIS1 = {0, 0, 0}; (* Velocidade de S1 em relação a I,
descrita na base S1. Nulo, pois as origens de ambos os referenciais,
S1 e I, são coincidentes *)
S1vS1S2 = {0, 0, 0}; (* Velocidade de S1 em relação a S2,
descrita na base S1. Nulo,
pois a posição da origem de S2 não varia em relação a S1 *)
S1vIS2 = S1vIS1 + S1vS1S2 + Cross[S1ωIS1, S1pIS2]
(* Velocidade de S2 em relação a I, descrita na base S1 *)
S1vS2P = {0, 0, 0};(*Velocidade de P em relação a S2,
descrita na base S1. Nula, pois P é solidária a S2 *)
S1vIP = S1vIS2 + S1vS2P + Cross[S1ωIS2, S1pS2P] // FullSimplify
(* Velocidade absoluta de P, descrita na base S1 *)
S2vIP = Tθ.S1vIP // FullSimplify
(* Velocidade absoluta de P, descrita na base S2 *)
IvIP = Transpose[Tβ].S1vIP // FullSimplify
  (* Velocidade absoluta de P, descrita na base I *)
```

Out[26]=
```
{0, -L β'[t], 0}
```

Out[28]=
```
{R Cos[θ[t]] θ'[t], -((L + R Cos[θ[t]]) β'[t]), -R Sin[θ[t]] θ'[t]}
```

Out[29]=
```
{R θ'[t], -((L + R Cos[θ[t]]) β'[t]), 0}
```

Out[30]=
```
{R Cos[θ[t]] θ'[t], -Cos[β[t]] (L + R Cos[θ[t]]) β'[t] + R Sin[β[t]] Sin[θ[t]] θ'[t],
 -((L + R Cos[θ[t]]) Sin[β[t]] β'[t]) - R Cos[β[t]] Sin[θ[t]] θ'[t]}
```

In[31]:=
```
(* Vetor Aceleração Absoluta de P *)
(* Como no caso da velocidade, o teorema cinemático
 para a aceleração pode ser escrito de forma genérica como: *)
```

$$ {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{a}^{\square} = {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{a}^{\bigstar} + {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{a}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\alpha^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{p}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\omega^{\bigstar} \times \left({}^{\triangle}_{\bigcirc}\omega^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{p}^{\square}\right) + 2{}^{\triangle}_{\bigcirc}\omega^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} $$

```
(* Dessa forma, para achar S1aIP,
escolhe-se utilizar o referencial S2 no teorema, isto é, * = S2. Com isso,
o teorema cinemático pode ser escrito da seguinte forma: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\mathbf{a}^{P} = {}^{I}_{S_1}\mathbf{a}^{S_2} + {}^{S_2}_{S_1}\mathbf{a}^{P} + {}^{I}_{S_1}\alpha^{S_2} \times {}^{S_2}_{S_1}\mathbf{p}^{P} + {}^{I}_{S_1}\omega^{S_2} \times \left({}^{I}_{S_1}\omega^{S_2} \times {}^{S_2}_{S_1}\mathbf{p}^{P}\right) + 2{}^{I}_{S_1}\omega $$

```
(* Como anteriormente, para determinar S1aIS2 é
 preciso aplicar novamente o teorema cinemático. Para isso,
escolhe-se utilizar o referencial S_1, isto é * = S_1. Com isso,
o teorema cinemático pode ser escrito da seguinte forma: *)
```

$$ {}^{I}_{S_1}\mathbf{a}^{S_2} = {}^{I}_{S_1}\mathbf{a}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_1}\mathbf{a}^{S_2} + {}^{I}_{S_1}\alpha^{S_1} \times {}^{S_1}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2} + {}^{I}_{S_1}\omega^{S_1} \times \left({}^{I}_{S_1}\omega^{S_1} \times {}^{S_1}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2}\right) + 2{}^{I}_{S_1} $$

```
(* Com isso, definem-se os termos necessários para o cálculo: *)
S1aIS1 = {0, 0, 0}; (* Aceleração de S1 em relação a I,
descrita na base S1. Nula pois as origens de S1 e I são coincidentes *)
S1aS1S2 = {0, 0, 0}; (* Aceleração de S2 em relação a S2,
descrita na base S1. Nula pois a posição de S2 em relação a S1 não varia *)
S1aIS2 = S1aIS1 + S1aS1S2 + Cross[S1αIS1, S1pS1S2] +
  Cross[S1ωIS1, Cross[S1ωIS1, S1pS1S2]] + 2 * Cross[S1ωIS1, S1vS1S2]
(* Aceleração de S2 em relação a I, descrita na base S1 *)
S1aS2P = {0, 0, 0}; (* Aceleração de P em relação a S2,
descrita na base S1. Nula pois a posição de P em relação a S2 não varia. *)
S1aIP =
 S1aIS2 + S1aS2P + Cross[S1αIS2, S1pS2P] + Cross[S1ωIS2, Cross[S1ωIS2, S1pS2P]] +
   2 * Cross[2 * S1ωIS2, S1vS2P] // FullSimplify
(* Aceleração absoluta de P, descrita na base S1 *)
S2aIP = Tθ.S1aIP // FullSimplify
(* Aceleração absoluta de P, descrita na base S2 *)
IaIP = Transpose[Tβ].S1aIP // FullSimplify
  (* Aceleração absoluta de P, descrita na base I *)
```

Out[36]=

$$\{0, -L\,\beta''[t], -L\,\beta'[t]^2\}$$

Out[38]=

$$\{-R\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\theta'[t]^2 + R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\theta''[t],$$
$$2\,R\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\beta'[t]\,\theta'[t] - (L + R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta''[t],$$
$$-\left((L + R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta'[t]^2\right) - R\left(\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\theta'[t]^2 + \mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\theta''[t]\right)\}$$

Out[39]=

$$\{(L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\beta'[t]^2+R\,\theta''[t],\ 2\,R\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\beta'[t]\,\theta'[t]-(L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta''[t],\ -\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,(L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta'[t]^2-R\,\theta'[t]^2\}$$

Out[40]=

$$\{-R\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\theta'[t]^2+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\theta''[t],\ (L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\mathrm{Sin}[\beta[t]]\,\beta'[t]^2+2\,R\,\mathrm{Cos}[\beta[t]]\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\beta'[t]\,\theta'[t]-\mathrm{Cos}[\beta[t]]\,(L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta''[t]+R\,\mathrm{Sin}[\beta[t]]\,\left(\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\theta'[t]^2+\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\theta''[t]\right),\ \mathrm{Sin}[\beta[t]]\,(2\,R\,\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\beta'[t]\,\theta'[t]-(L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta''[t])+\mathrm{Cos}[\beta[t]]\,\left(-\left((L+R\,\mathrm{Cos}[\theta[t]])\,\beta'[t]^2\right)-R\,\left(\mathrm{Cos}[\theta[t]]\,\theta'[t]^2+\mathrm{Sin}[\theta[t]]\,\theta''[t]\right)\right)\}$$