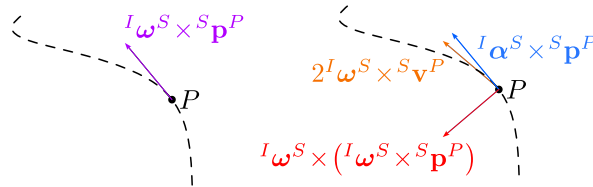


## Gabarito Oficial

### Questão 1

Em geral, esses termos aparecem quando há algum tipo de rotação ocorrendo no sistema, seja ela simples ou complexa. A Figura a seguir ilustra as possíveis componentes de velocidade e aceleração para uma trajetória genérica.



- (a) **Velocidade Tangencial (ou de Transporte)** ( $I\omega^S \times^S \mathbf{p}^P$ ): Representada em roxo na ilustração, esta parcela descreve o movimento que a partícula P executaria se estivesse rigidamente vinculada ao referencial móvel S. Fisicamente, está associado a variação temporal da direção do vetor posição resultante exclusivamente da rotação de S em relação ao referencial inercial I, gerando um vetor instantaneamente tangencial à trajetória circular de rotação.
- (b) **Aceleração Tangencial (ou Aceleração de Euler)** ( $I\alpha^S \times^S \mathbf{p}^P$ ): Identificada pelo vetor representado em cor azul, esta componente constitui a aceleração tangencial de transporte. Ela surge quando a velocidade angular do sistema móvel não é constante, contabilizando como a aceleração angular altera tanto o módulo quanto a direção da velocidade de transporte de partícula ao longo do tempo.
- (c) **Aceleração Normal (ou Centrípeta)** ( $I\omega^S \times (I\omega^S \times^S \mathbf{p}^P)$ ): Destacada em vermelho, esta componente reflete a mudança contínua na direção da própria velocidade de tangencial devido à rotação. Por ser o resultado de um duplo produto vetorial, ela gera um vetor que aponta radialmente para o eixo de rotação, mantendo-se perpendicular à velocidade angular e ao vetor posição relativa.
- (d) **Aceleração de Coriolis** ( $2I\omega^S \times^S \mathbf{v}^P$ ): Este termo representa o acoplamento dinâmico entre o movimento relativo da partícula e a rotação do referencial. Ele surge para compensar dois efeitos vistos do referencial inercial: a mudança contínua na direção da velocidade relativa e o deslocamento da partícula para regiões do espaço que possuem diferentes velocidades de transporte tangenciais. Geometricamente, o resultado é um vetor sempre perpendicular tanto ao eixo de rotação quanto à velocidade relativa da partícula.

### Questão 2

Para a determinar a velocidade e a aceleração absolutas de uma partícula  $P$  em um sistema composto por 3 referenciais, é possível utilizar as seguintes formas dos teoremas cinemáticos:

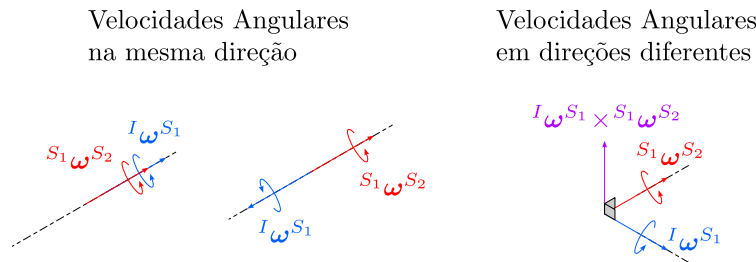
$$\begin{aligned}
 I\mathbf{v}^P &= I\mathbf{v}^{S_1} + S_1\mathbf{v}^P + I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P \\
 I\mathbf{v}^P &= I\mathbf{v}^{S_2} + S_2\mathbf{v}^P + I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P \\
 S_1I\mathbf{v}^P &= S_1I\mathbf{v}^{S_1} + S_1\mathbf{v}^P + S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P \\
 S_1I\mathbf{v}^P &= S_1I\mathbf{v}^{S_2} + S_2\mathbf{v}^P + S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P \\
 S_2I\mathbf{v}^P &= S_2I\mathbf{v}^{S_1} + S_1\mathbf{v}^P + S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P \\
 S_2I\mathbf{v}^P &= S_2I\mathbf{v}^{S_2} + S_2\mathbf{v}^P + S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P \\
 I\mathbf{a}^P &= I\mathbf{a}^{S_1} + S_1\mathbf{a}^P + I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P + I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times \left( I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P \right) + 2I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{v}^P \\
 I\mathbf{a}^P &= I\mathbf{a}^{S_2} + S_2\mathbf{a}^P + I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P + I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times \left( I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P \right) + 2I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{v}^P \\
 S_1I\mathbf{a}^P &= S_1I\mathbf{a}^{S_1} + S_1\mathbf{a}^P + S_1I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P + S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times \left( S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P \right) + 2S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{v}^P \\
 S_1I\mathbf{a}^P &= S_1I\mathbf{a}^{S_2} + S_2\mathbf{a}^P + S_1I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P + S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times \left( S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P \right) + 2S_1I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{v}^P \\
 S_2I\mathbf{a}^P &= S_2I\mathbf{a}^{S_1} + S_1\mathbf{a}^P + S_2I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P + S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times \left( S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{p}^P \right) + 2S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\mathbf{v}^P \\
 S_2I\mathbf{a}^P &= S_2I\mathbf{a}^{S_2} + S_2\mathbf{a}^P + S_2I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P + S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times \left( S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{p}^P \right) + 2S_2I\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times S_2\mathbf{v}^P
 \end{aligned}$$

### Questão 3

Utilizando o teorema do transporte cinemático, a expressão geral para a aceleração angular entre os referenciais é dada por:

$$I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} + S_1\boldsymbol{\alpha}^{S_2} + I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\boldsymbol{\omega}^{S_2}.$$

Para que a situação física  $I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} + S_1\boldsymbol{\alpha}^{S_2}$  seja válida, o produto vetorial  $I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times S_1\boldsymbol{\omega}^{S_2}$  precisa ser nulo. Este cenário ocorre quando as velocidades angulares,  $I\boldsymbol{\omega}^{S_1}$  e  $S_1\boldsymbol{\omega}^{S_2}$ , são colineares (possuem a mesma direção), conforme ilustrado nos dois primeiros casos da figura abaixo:



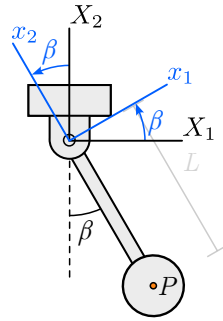
Por outro lado, quando as velocidades angulares possuem direções distintas, surge uma componente adicional que contabiliza a variação temporal da direção de um vetor velocidade angular em relação ao outro. Esse termo complementar é representada no terceiro caso da figura acima.

### Questão 4

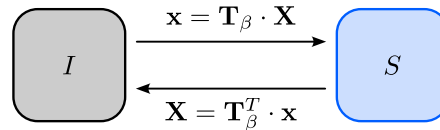
(a) Neste caso, é possível estabelecer dois referenciais:

- $I(X_i)$ : Inercial;
- $S(x_i)$ : Móvel – Não inercial (Solidário à haste móvel do pêndulo), formando um ângulo  $\beta(t)$  com o referencial  $I$ .

Estes são ilustrados como segue:



Com isso, estabelece-se um mapeamento que transforma vetores da base associada a  $I$  para a base associada a  $S$ , e vice-versa através da matriz de transformação de coordenadas  $\mathbf{T}_\beta$ . Esse processo pode ser descrito através do seguinte diagrama:



- (b) A rotação do pêndulo descrita pelo ângulo  $\beta$  ocorre em torno da direção  $X_3$  no sentido positivo, portanto a matriz de transformação de coordenadas e sua transposta são descritas por:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} c(\beta) & s(\beta) & 0 \\ -s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_\beta^T = \begin{bmatrix} c(\beta) & -s(\beta) & 0 \\ s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- (c) A posição absoluta da partícula  $P$  pode ser descrita como a soma de vetores posição mais simples, como segue:

$${}_I\mathbf{p}^P = {}_I\mathbf{p}^S + {}_S\mathbf{p}^P \quad (5)$$

Para que essa operação seja válida, ela precisa ser realizada com seus vetores descritos na mesma base. Com isso, considerando os referenciais estabelecidos e suas respectivas bases, duas descrições são possíveis:

$${}_I\mathbf{p}^P = {}_I\mathbf{p}^S + {}_I\mathbf{p}^P \quad \text{ou} \quad {}_S\mathbf{p}^P = {}_S\mathbf{p}^S + {}_S\mathbf{p}^P \quad (6)$$

Por questões de conveniência, vamos determinar as posições descritas na base  $S$  primeiro:

$${}_I\mathbf{p}^S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{pois as origens de } I \text{ e } S \text{ são coincidentes}; \quad (7)$$

$${}_S\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo:

$${}_S\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Para determinar a posição absoluta na base inercial, basta transformar o vetor  ${}^I_S \mathbf{p}^P$  através da matriz de transformação de coordenadas,  $\mathbf{T}_\beta^T$ :

$${}^I \mathbf{p}^P = \mathbf{T}_\beta^T \cdot {}^S \mathbf{p}^P = \begin{bmatrix} c(\beta) & -s(\beta) & 0 \\ s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L s(\beta) \\ -L c(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Com isso, a posição absoluta descrita em todas as bases estabelecidas se dá por:

$$\boxed{{}^I_S \mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad \boxed{{}^I \mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} L s(\beta) \\ -L c(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (10)$$

- (d) O resultado da diferenciação direta do vetor posição descrito numa base móvel não fornece a velocidade total, pois não leva em consideração a rotação da base móvel. Enquanto isso, se a diferenciação for feita considerando uma base inercial, a velocidade instantânea total é obtida.

A diferença fundamental entre as duas operações reside na natureza dos vetores unitários de cada base:

- **Na base inercial:** Os vetores unitários não mudam em direção nem em módulo, por isso, sua derivada temporal é zero. Assim, a velocidade é simplesmente a variação das coordenadas do vetor posição.
- **Na base móvel (que gira):** Os vetores unitários mudam em direção, acompanhando o movimento giratório. Mesmo que um objeto esteja parado em relação à base, se a base gira, o vetor unitário muda de direção no espaço. Ignorar a derivada desses vetores significa ignorar o próprio movimento de rotação do sistema.

Por isso, para derivarmos um vetor descrito em uma base móvel que gira, do ponto de vista da base inercial, é necessário utilizar o **teorema do transporte cinemático**. Ele estabelece que a variação total de um vetor é a soma de duas parcelas:

- **Variação Local:** A derivada das componentes (o que um observador solidário ao sistema móvel enxerga);
- **Variação de direção do vetor derivado:** Contabiliza o efeito geométrico da rotação da base no espaço.

Matematicamente, isso pode ser escrito da seguinte forma:

$${}_I \left[ \frac{d}{dt} ({}^S \mathbf{p}^P) \right] = {}_S \left[ \frac{d}{dt} ({}^S \mathbf{p}^P) \right] + {}^I \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S \mathbf{p}^P \quad (11)$$

Este teorema é utilizado para obter a forma final dos teoremas cinemáticos da velocidade e da aceleração. Partindo da expressão da posição:

$$\begin{aligned} {}^I \mathbf{p}^P &= {}^I \mathbf{p}^S + {}^S \mathbf{p}^P \\ {}_I \left[ \frac{d}{dt} ({}^I \mathbf{p}^P) \right] &= {}_I \left[ \frac{d}{dt} ({}^I \mathbf{p}^S + {}^S \mathbf{p}^P) \right] \\ {}^I \mathbf{v}^P &= {}_I \left[ \frac{d}{dt} ({}^I \mathbf{p}^S) \right] + {}_I \left[ \frac{d}{dt} ({}^S \mathbf{p}^P) \right] \\ {}^I \mathbf{v}^P &= {}_I \left[ \frac{d}{dt} ({}^I \mathbf{p}^S) \right] + {}_S \left[ \frac{d}{dt} ({}^S \mathbf{p}^P) \right] + {}^I \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S \mathbf{p}^P \\ {}^I \mathbf{v}^P &= {}^I \mathbf{v}^S + {}^S \mathbf{v}^P + {}^I \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S \mathbf{p}^P \end{aligned} \quad (12)$$

Um procedimento análogo é feito para obter a expressão da aceleração:

$$\begin{aligned}
I\mathbf{v}^P &= I\mathbf{v}^S + S\mathbf{v}^P + I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{p}^P \\
I\left[\frac{d}{dt}(I\mathbf{v}^P)\right] &= I\left[\frac{d}{dt}(I\mathbf{v}^S + S\mathbf{v}^P + I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{p}^P)\right] \\
I\left[\frac{d}{dt}(I\mathbf{v}^P)\right] &= I\left[\frac{d}{dt}(I\mathbf{v}^S)\right] + I\left[\frac{d}{dt}(S\mathbf{v}^P)\right] + I\left[\frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{p}^P)\right] \\
I\left[\frac{d}{dt}(I\mathbf{v}^P)\right] &= I\left[\frac{d}{dt}(I\mathbf{v}^S)\right] + I\left[\frac{d}{dt}(S\mathbf{v}^P)\right] + I\left[\frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}^S)\right] \times S\mathbf{p}^P + I\boldsymbol{\omega}^S \times I\left[\frac{d}{dt}(S\mathbf{p}^P)\right] \\
I\mathbf{a}^P &= I\mathbf{a}^S + \left[\frac{d}{dt}(S\mathbf{v}^P)\right] + I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{v}^P + I\boldsymbol{\alpha}^S \times S\mathbf{p}^P \\
&\quad + I\boldsymbol{\omega}^S \times \left\{ I\left[\frac{d}{dt}(S\mathbf{p}^P)\right] + I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{p}^P \right\} \\
I\mathbf{a}^P &= I\mathbf{a}^S + S\mathbf{a}^P + I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{v}^P + I\boldsymbol{\alpha}^S \times S\mathbf{p}^P + I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{v}^P \\
&\quad + I\boldsymbol{\omega}^S \times (I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{p}^P) \\
I\mathbf{a}^P &= I\mathbf{a}^S + S\mathbf{a}^P + I\boldsymbol{\alpha}^S \times S\mathbf{p}^P + I\boldsymbol{\omega}^S \times (I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{p}^P) + 2I\boldsymbol{\omega}^S \times S\mathbf{v}^P
\end{aligned} \tag{13}$$

Como as operações da velocidade e da aceleração podem ser feitas em qualquer base, as expressões gerais, para dois referenciais  $I$  (inercial) e  $S$  (móvel), podem ser escritas como:

$${}^I\mathbf{v}^P = {}^I\mathbf{v}^S + {}^S\mathbf{v}^P + {}^I\boldsymbol{\omega}^S \times {}^S\mathbf{p}^P \tag{14}$$

$${}^I\mathbf{a}^P = {}^I\mathbf{a}^S + {}^S\mathbf{a}^P + {}^I\boldsymbol{\alpha}^S \times {}^S\mathbf{p}^P + {}^I\boldsymbol{\omega}^S \times ({}^I\boldsymbol{\omega}^S \times {}^S\mathbf{p}^P) + 2{}^I\boldsymbol{\omega}^S \times {}^S\mathbf{v}^P \tag{15}$$

- (e) Há duas formas de fazer esse item: A primeira forma é utilizando os teoremas cinemáticos, já a segunda forma é fazendo a diferenciação temporal direta do vetor posição quando este está descrito na base  $I$  (discussão do item anterior).

- **Utilizando os teoremas cinemáticos:** (Escolhendo a base  $S$  para a operação)

Primeiro, definem-se a velocidade e aceleração angulares:

$${}^I\boldsymbol{\omega}^S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix}; \quad {}^S\boldsymbol{\omega}^S = \mathbf{T}_\beta \cdot {}^I\boldsymbol{\omega}^S = \begin{bmatrix} c(\beta) & s(\beta) & 0 \\ -s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

$${}^I\boldsymbol{\alpha}^S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix}; \quad {}^S\boldsymbol{\alpha}^S = \mathbf{T}_\beta \cdot {}^I\boldsymbol{\alpha}^S = \begin{bmatrix} c(\beta) & s(\beta) & 0 \\ -s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

O próximo passo é aplicar o teorema cinemático da velocidade:

$${}^I_S\mathbf{v}^P = \underbrace{{}^I_S\mathbf{v}^S}_{(1)} + \underbrace{{}^S_S\mathbf{v}^P}_{(2)} + \underbrace{{}^I_S\boldsymbol{\omega}^S \times {}^S_S\mathbf{p}^P}_{(3)} \tag{18}$$

(1)  ${}^I_S\mathbf{v}^S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , pois as origens de  $S$  e  $I$  são coincidentes;

(2)  ${}^S_S\mathbf{v}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , pois o vetor  ${}^S_S\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix}$  não muda à medida que o tempo avança;

(3)  ${}^I_S\boldsymbol{\omega}^S \times {}^S_S\mathbf{p}^P = \epsilon_{ijk} {}^I_S\omega_i^S {}^S_S p_j^P \hat{\mathbf{e}}_k = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\beta} \\ 0 & -L & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} L\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Portanto a velocidade absoluta de  $P$  se resume à velocidade tangencial da partícula  $P$  que se dá na direção  $x_1^{(1)}$ :

$$\boxed{{}^I_S \mathbf{v}^P = \begin{pmatrix} L\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (19)$$

Para obter a aceleração, aplica-se o teorema cinemático da aceleração:

$${}^I_S \mathbf{a}^P = \underbrace{{}^I_S \mathbf{a}^S}_{(4)} + \underbrace{{}^S_S \mathbf{a}^P}_{(5)} + \underbrace{{}^I_S \boldsymbol{\alpha}^S \times {}^S_S \mathbf{p}^P}_{(6)} + \underbrace{{}^I_S \boldsymbol{\omega}^S \times ({}^I_S \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S_S \mathbf{p}^P)}_{(7)} + \underbrace{2 {}^I_S \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S_S \mathbf{v}^P}_{(8)} \quad (20)$$

$$(4) \quad {}^I_S \mathbf{a}^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pois } {}^I_S \mathbf{v}^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(5) \quad {}^S_S \mathbf{a}^P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pois } {}^S_S \mathbf{v}^P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(6) \quad {}^I_S \boldsymbol{\alpha}^S \times {}^S_S \mathbf{p}^P = \epsilon_{ijk} {}^I_S \alpha_i^S {}^S_S p_j^P \hat{\mathbf{e}}_k = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\beta} \\ 0 & -L & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} L\ddot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(7) \quad {}^I_S \boldsymbol{\omega}^S \times ({}^I_S \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S_S \mathbf{p}^P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\beta} \\ L\dot{\beta} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L\dot{\beta}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad 2 {}^I_S \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S_S \mathbf{v}^P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pois } {}^S_S \mathbf{v}^P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a aceleração absoluta de  $P$  se resume as componentes de aceleração tangencial, que aponta na direção  $x_1^{(1)}$ , e aceleração normal, que aponta na direção  $x_2^{(2)}$ .

$$\boxed{{}^I_S \mathbf{a}^P = \begin{pmatrix} L\ddot{\beta} \\ L\dot{\beta}^2 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (21)$$

- Utilizando a derivação direta na base  $I$ :

$$\boxed{{}^I_I \mathbf{v}^P = \frac{d}{dt} ({}^I_I \mathbf{p}^P) = \begin{pmatrix} L\dot{\beta} c(\beta) \\ L\dot{\beta} s(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (22)$$

$$\boxed{{}^I_I \mathbf{a}^P = \frac{d}{dt} ({}^I_I \mathbf{v}^P) = \begin{pmatrix} L [\ddot{\beta} c(\beta) - \dot{\beta}^2 s(\beta)] \\ L [\ddot{\beta} s(\beta) + \dot{\beta}^2 c(\beta)] \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (23)$$

- (f) Para determinar a posição, aceleração e velocidade em todas as bases basta aplicar as matrizes de transformação:

Para a posição, isso já foi feito no item (c), resultando em:

$$\boxed{{}^I_S \mathbf{p}^P = \begin{pmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{{}^I_I \mathbf{p}^P = \begin{pmatrix} Ls(\beta) \\ -Lc(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (24)$$

Para a velocidade e aceleração, pode-se transformar as expressões obtidas no item anterior:

$${}^I_S \mathbf{v}^P = \mathbf{T}_\beta \cdot {}^I \mathbf{v}^P = \begin{bmatrix} c(\beta) & s(\beta) & 0 \\ -s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L\dot{\beta} c(\beta) \\ L\dot{\beta} s(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{{}^I_S \mathbf{v}^P = \begin{Bmatrix} L\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (25)$$

$${}^I_S \mathbf{a}^P = \mathbf{T}_\beta \cdot {}^I \mathbf{a}^P = \begin{bmatrix} c(\beta) & s(\beta) & 0 \\ -s(\beta) & c(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L[\ddot{\beta} c(\beta) - \dot{\beta}^2 s(\beta)] \\ L[\ddot{\beta} s(\beta) + \dot{\beta}^2 c(\beta)] \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{{}^I_S \mathbf{a}^P = \begin{Bmatrix} L\ddot{\beta} \\ L\dot{\beta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (26)$$

Nota-se que os resultados devem ser iguais aos obtidos pelos teoremas cinemáticos.

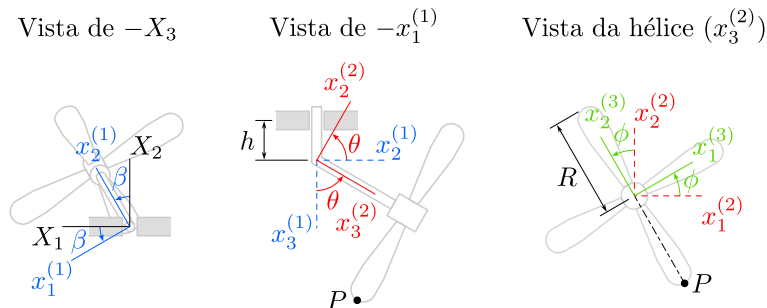
### Questão 5

• **Estabelecendo Sistemas de Referências**

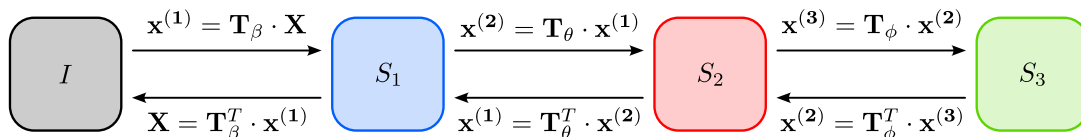
De acordo com a descrição do enunciado, quatro referenciais podem ser estabelecidos:

- $I(X_i)$ : Inercial;
- $S_1(x_i^{(1)})$ : Móvel 1 – Não inercial (Solidário à haste vertical giratória), formando um ângulo  $-\beta(t)$  em torno do eixo  $X_3$  do referencial  $I$ ;
- $S_2(x_i^{(2)})$ : Móvel 2 – Não inercial (Solidário à haste diagonal), formando um ângulo fixo  $\theta$  em torno do eixo  $x_1^{(1)}$  do referencial  $S_1$ ;
- $S_3(x_i^{(3)})$ : Móvel 3 – Não inercial (Solidário à hélice), formando um ângulo  $\phi(t)$  em torno do eixo  $x_3^{(2)}$ .

Estes são ilustrados a seguir:



Com isso, estabelece-se um mapeamento que transforma os vetores descritos em diferentes bases associadas aos referenciais via matrizes de transformação de coordenadas. Esse processo pode ser descrito através do seguinte diagrama:



Da forma com que os referenciais foram estabelecidos, trata-se de um sistema 3–1–3. Com isso as matrizes de transformação de coordenadas e suas transpostas são determinadas como segue:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} c(-\beta(t)) & s(-\beta(t)) & 0 \\ -s(-\beta(t)) & c(-\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} c(\beta(t)) & -s(\beta(t)) & 0 \\ s(\beta(t)) & c(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{T}_\beta^T = \begin{bmatrix} c(-\beta(t)) & -s(-\beta(t)) & 0 \\ s(-\beta(t)) & c(-\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_\beta^T = \begin{bmatrix} c(\beta(t)) & s(\beta(t)) & 0 \\ -s(\beta(t)) & c(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(-\theta) & s(-\theta) \\ 0 & -s(-\theta) & c(-\theta) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta) & -s(\theta) \\ 0 & s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\theta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(-\theta) & -s(-\theta) \\ 0 & s(-\theta) & c(-\theta) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_\theta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta) & s(\theta) \\ 0 & -s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} c(\phi(t)) & s(\phi(t)) & 0 \\ -s(\phi(t)) & c(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_\phi^T = \begin{bmatrix} c(\phi(t)) & -s(\phi(t)) & 0 \\ s(\phi(t)) & c(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Posição Absoluta de P**

A posição absoluta da partícula  $P$  pode ser descrita como a soma de vetores posição mais simples, como segue:

$${}^I_{S_2}\mathbf{p}^P = {}^I_{S_2}\mathbf{p}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_2}\mathbf{p}^{S_2} + {}^{S_2}_{S_2}\mathbf{p}^{S_3} + {}^{S_3}_{S_2}\mathbf{p}^P$$

$${}^I_{S_1}\mathbf{p}^{S_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{Bmatrix};$$

$${}^I_{S_2}\mathbf{p}^{S_1} = \mathbf{T}_\theta \cdot {}^I_{S_1}\mathbf{p}^{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta) & -s(\theta) \\ 0 & s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{Bmatrix} \rightarrow {}^I_{S_2}\mathbf{p}^{S_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -hs(\theta) \\ hc(\theta) \end{Bmatrix}$$

$${}^{S_1}_{S_1}\mathbf{p}^{S_2} = {}^{S_1}_{S_2}\mathbf{p}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois as origens de } S_1 \text{ e } S_2 \text{ são coincidentes;}$$

$${}^{S_2}_{S_2}\mathbf{p}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{Bmatrix};$$

$${}^{S_3}_{S_2}\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$${}^{S_3}_{S_2}\mathbf{p}^P = \mathbf{T}_\phi^T \cdot {}^{S_3}_{S_3}\mathbf{p}^P = \begin{bmatrix} c(\phi(t)) & -s(\phi(t)) & 0 \\ s(\phi(t)) & c(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow {}^{S_3}_{S_2}\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} Rs(\phi(t)) \\ -Rc(\phi(t)) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com isso, a posição absoluta, descrita na base  $S_2$  é determinada:

$${}^I_{S_2}\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -hs(\theta) \\ hc(\theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Rs(\phi(t)) \\ -Rc(\phi(t)) \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow {}^I_{S_2}\mathbf{p}^P = \begin{Bmatrix} Rs(\phi(t)) \\ -Rc(\phi(t)) - hs(\theta) \\ L + hc(\theta) \end{Bmatrix}$$

• **Velocidades Angulares**

A velocidade angular pode ser descrita por parcelas menores, como no caso da posição:

$${}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_3} = {}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_1} + {}^{S_1}_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_2} + {}^{S_2}_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_3}$$

$$\begin{aligned}
{}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta}(t) \end{Bmatrix}; \\
{}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} &= \mathbf{T}_\theta \cdot {}_{S_1}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} = \mathbf{T}_\theta \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot {}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\theta) & -s(\theta) \\ 0 & s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(\beta(t)) & -s(\beta(t)) & 0 \\ s(\beta(t)) & c(\beta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta}(t) \end{Bmatrix} \\
{}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\dot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix}; \\
{}_{S_1}^{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow {}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois o ângulo } \theta \text{ é fixo;} \\
{}_{S_2}^{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_3} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}(t) \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Com isso, é possível determinar as velocidades angulares remanescentes:

$$\begin{aligned}
{}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_3} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\dot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}(t) \end{Bmatrix} \rightarrow {}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}(t) s(\theta) \\ \dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix} \\
{}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_2} &= {}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} + {}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\dot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow {}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\dot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

#### • Acelerações Angulares

As acelerações angulares podem ser determinadas através do teorema do transporte cinemático:

$${}_{S_2}^I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = {}_{S_2}^I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} + {}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\alpha}^{S_2} + {}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times {}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2}$$

$$\begin{aligned}
{}_{S_2}^I\boldsymbol{\alpha}^{S_1} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\ddot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix} \\
{}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\alpha}^{S_2} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
{}_{S_2}^I\boldsymbol{\omega}^{S_1} \times {}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\omega}^{S_2} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois } {}_{S_2}^{S_1}\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$${}_{S_2}^I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\ddot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow {}_{S_2}^I\boldsymbol{\alpha}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\ddot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix}$$

Da mesma forma, é possível determinar a aceleração angular de  $S_3$  em relação à I:

$${}^I_{S_2}\boldsymbol{\alpha}^{S_3} = {}^I_{S_2}\boldsymbol{\alpha}^{S_2} + {}^S_2\boldsymbol{\alpha}^{S_3} + {}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}^S_2\boldsymbol{\omega}^{S_3}$$

$${}^S_2\boldsymbol{\alpha}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi}(t) \end{Bmatrix}$$

$${}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}^S_2\boldsymbol{\omega}^{S_3} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ 0 & \dot{\beta}(t) s(\theta) & -\dot{\beta}(t) c(\theta) \\ 0 & 0 & \dot{\phi}(t) \end{vmatrix} \rightarrow {}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}^S_2\boldsymbol{\omega}^{S_3} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}(t)\dot{\phi}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com isso,

$${}^I_{S_2}\boldsymbol{\alpha}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ -\ddot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta}(t)\dot{\phi}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow {}^I_{S_2}\boldsymbol{\alpha}^{S_3} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}(t)\dot{\phi}(t) s(\theta) \\ \ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ \ddot{\phi}(t) - \ddot{\beta}(t) c(\theta) \end{Bmatrix}$$

### • Velocidade Absoluta de P

Em casos envolvendo mais de 1 referencial móvel, é necessário aplicar o teorema cinemático de forma recursiva para determinar todos os termos. Isto é, divide-se o problema em formas mais simples.

Para achar  ${}^I_{S_2}\mathbf{v}^P$ , pode-se utilizar o referencial  $S_3$  no teorema cinemático, resultando na seguinte forma:

$${}^I_{S_2}\mathbf{v}^P = \underbrace{{}^I_{S_2}\mathbf{v}^{S_3}}_{(3)} + \underbrace{{}^S_3\mathbf{v}^P}_{(1)} + \underbrace{{}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_3} \times {}^S_3\mathbf{p}^P}_{(2)}$$

$$(1) \quad {}^S_3\mathbf{v}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois não há variação no módulo de } {}^S_3\mathbf{p}^P;$$

$$(2) \quad {}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_3} \times {}^S_3\mathbf{p}^P = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ 0 & \dot{\beta}(t) s(\theta) & \dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta) \\ R s(\phi(t)) & -R c(\phi(t)) & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} R c(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] \\ R s(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] \\ -R \dot{\beta}(t) s(\theta) s(\phi(t)) \end{Bmatrix};$$

(3) Para determinar este termo, é necessário aplicar o teorema cinemático novamente. Neste caso, utiliza-se o referencial  $S_2$ :

$${}^I_{S_2}\mathbf{v}^{S_3} = \underbrace{{}^I_{S_2}\mathbf{v}^{S_2}}_{(3.1)} + \underbrace{{}^S_2\mathbf{v}^{S_3}}_{(3.2)} + \underbrace{{}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}^S_2\mathbf{p}^{S_3}}_{(3.3)}$$

$$(3.1) \quad {}^I_{S_2}\mathbf{v}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois não há variação do módulo de } {}^I_{S_2}\mathbf{p}^{S_2}. \text{ Nesse caso não há necessidade de aplicar novamente o teorema cinemático aqui, pois } \theta \text{ é fixo. Caso contrário, seria necessário;}$$

$$(3.2) \quad {}^S_2\mathbf{v}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois as origens dos referenciais } S_2 \text{ e } S_3 \text{ são coincidentes;}$$

$$(3.3) \quad {}^I_{S_2}\boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}^S_2\mathbf{p}^{S_3} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ 0 & \dot{\beta}(t) s(\theta) & -\dot{\beta}(t) c(\theta) \\ 0 & 0 & L \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} L\dot{\beta}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com isso,

$${}^I_{S_2}\mathbf{v}^{S_3} = \begin{Bmatrix} L\dot{\beta}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dessa forma, a velocidade absoluta de  $P$  é determinada:

$${}_{S_2}^I \mathbf{v}^P = \begin{Bmatrix} L\dot{\beta}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R c(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] \\ R s(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] \\ -R\dot{\beta}(t) s(\theta) s(\phi(t)) \end{Bmatrix}$$

$${}_{S_2}^I \mathbf{v}^P = \begin{Bmatrix} L\dot{\beta}(t) s(\theta) + R c(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] \\ R s(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] \\ -R\dot{\beta}(t) s(\theta) s(\phi(t)) \end{Bmatrix}$$

• **Aceleração Absoluta de P**

De forma análoga ao caso da velocidade, para determinar a aceleração através do teorema cinemático, é necessário aplicá-lo de forma recorrente, pois estamos lidando com um sistema composto por mais de um sistema móvel estabelecido.

$${}_{S_2}^I \mathbf{a}^P = \underbrace{{}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_3}}_{(8)} + \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{a}^P}_{(4)} + \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\alpha}^{S_3} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{p}^P}_{(5)}}_{(5)} + \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_3} \times \left( \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_3} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{p}^P}_{(6)}}_{(6)} \right)}_{(6)} + \underbrace{2 \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_3} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{v}^P}_{(7)}}_{(7)}}_{(7)}$$

$$(4) \quad {}_{S_2}^{S_3} \mathbf{a}^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois não há variação de } {}_{S_2}^{S_3} \mathbf{p}^P;$$

(5)

$${}_{S_2}^I \boldsymbol{\alpha}^{S_3} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{p}^P}_{(5)} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ \dot{\beta}(t)\dot{\phi}(t) s(\theta) & \ddot{\beta}(t) s(\theta) & \ddot{\phi}(t) - \ddot{\beta}(t) c(\theta) \\ R s(\phi(t)) & -R c(\phi(t)) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} R c(\phi(t)) [\ddot{\phi}(t) - \ddot{\beta}(t) c(\theta)] \\ R s(\phi(t)) [\ddot{\phi}(t) - \ddot{\beta}(t) c(\theta)] \\ -R s(\theta) [\ddot{\beta}(t) s(\phi(t)) + \dot{\beta}(t)\dot{\phi}(t) c(\phi(t))] \end{Bmatrix};$$

(6)

$${}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_3} \times \left( \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_3} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{p}^P}_{(6)}}_{(6)} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ 0 & \dot{\beta}(t) s(\theta) & \dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta) \\ R c(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] & R s(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)] & -R\dot{\beta}(t) s(\theta) s(\phi(t)) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -R s(\phi(t)) [\dot{\beta}(t)^2 + \dot{\phi}(t)^2 - 2\dot{\beta}(t)\dot{\phi}(t) c(\theta)] \\ R c(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)]^2 \\ R\dot{\beta}(t) s(\theta) c(\phi(t)) [\dot{\beta}(t) c(\theta) - \dot{\phi}(t)] \end{Bmatrix};$$

$$(7) \quad 2 \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_3} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{v}^P}_{(7)}}_{(7)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois } \underbrace{{}_{S_2}^{S_3} \mathbf{v}^P}_{(7)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

(8) Para determinar esse termo, é necessário aplicar o teorema cinemático novamente:

$${}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_3} = \underbrace{{}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_2}}_{(8.1)} + \underbrace{{}_{S_2}^{S_2} \mathbf{a}^{S_3}}_{(8.2)} + \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\alpha}^{S_2} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_2} \mathbf{p}^{S_3}}_{(8.3)}}_{(8.3)} + \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_2} \times \left( \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_2} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_2} \mathbf{p}^{S_3}}_{(8.4)}}_{(8.4)} \right)}_{(8.4)} + \underbrace{2 \underbrace{{}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_2} \times \underbrace{{}_{S_2}^{S_2} \mathbf{v}^{S_3}}_{(8.5)}}_{(8.5)}}_{(8.5)}$$

$$(8.1) \quad {}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois } \underbrace{{}_{S_2}^I \mathbf{p}^{S_2}}_{(8.1)} \text{ não varia com o tempo;}$$

$$(8.2) \quad {}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois as origens de } S_2 \text{ e } S_3 \text{ são coincidentes e essa situação não muda com o tempo.}$$

$$(8.3) \quad {}_{S_2}^I \boldsymbol{\alpha}^{S_2} \times {}_{S_2}^I \mathbf{p}^{S_3} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ 0 & \ddot{\beta}(t) s(\theta) & -\ddot{\beta}(t) c(\theta) \\ 0 & 0 & L \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} L\ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(8.4) \quad {}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_2} \times ({}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}_{S_2}^I \mathbf{p}^{S_3}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{e}}_3^{(2)} \\ 0 & \dot{\beta}(t) s(\theta) & -\dot{\beta}(t) c(\theta) \\ L\dot{\beta}(t) s(\theta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L\dot{\beta}(t)^2 c(\theta) s(\theta) \\ -L\dot{\beta}(t)^2 [s(\theta)]^2 \end{Bmatrix};$$

$$(8.5) \quad 2 {}_{S_2}^I \boldsymbol{\omega}^{S_2} \times {}_{S_2}^I \mathbf{v}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ pois } {}_{S_2}^I \mathbf{v}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Com isso, a aceleração absoluta da origem do referencial  $S_3$  pode ser descrita a seguir:

$${}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L\ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -L\dot{\beta}(t)^2 c(\theta) s(\theta) \\ -L\dot{\beta}(t)^2 [s(\theta)]^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{{}_{S_2}^I \mathbf{a}^{S_3} = \begin{Bmatrix} L\ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ -L\dot{\beta}(t)^2 c(\theta) s(\theta) \\ -L\dot{\beta}(t)^2 [s(\theta)]^2 \end{Bmatrix}}$$

Logo, a aceleração absoluta da partícula  $P$  é descrita totalmente na base  $S_2$ :

$${}_{S_2}^I \mathbf{a}^P = \begin{Bmatrix} L\ddot{\beta}(t) s(\theta) \\ -L\dot{\beta}(t)^2 c(\theta) s(\theta) \\ -L\dot{\beta}(t)^2 [s(\theta)]^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R c(\phi(t)) [\ddot{\phi}(t) - \ddot{\beta} c(\theta)] \\ R s(\phi(t)) [\ddot{\phi}(t) - \ddot{\beta} c(\theta)] \\ -R s(\theta) [\ddot{\beta}(t) s(\phi(t)) + \dot{\beta}(t) \dot{\phi}(t) c(\phi(t))] \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} -R s(\phi(t)) [\dot{\beta}(t)^2 + \dot{\phi}(t)^2 - 2\dot{\beta}(t) \dot{\phi}(t) c(\theta)] \\ R c(\theta) [\dot{\phi}(t) - \dot{\beta}(t) c(\theta)]^2 \\ R \dot{\beta}(t) s(\theta) c(\phi(t)) [\dot{\beta}(t) c(\theta) - \dot{\phi}(t)] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Suprimindo a notação temporal "(t)":

$$\boxed{{}_{S_2}^I \mathbf{a}^P = \begin{Bmatrix} L\ddot{\beta} s(\theta) + R c(\phi) [\ddot{\phi} - \ddot{\beta} c(\theta)] - R s(\phi) [\dot{\beta}^2 + \dot{\phi}^2 - 2\dot{\beta} \dot{\phi} c(\theta)] \\ R s(\phi) [\ddot{\phi} - \ddot{\beta} c(\theta)] + R c(\theta) [\dot{\phi} - \dot{\beta} c(\theta)]^2 - L\dot{\beta}^2 c(\theta) s(\theta) \\ s(\theta) \left\{ \dot{\beta}^2 [R c(\theta) c(\phi) + L s(\theta)] - R \ddot{\beta} s(\phi) - 2R \dot{\beta} \dot{\phi} c(\phi) \right\} \end{Bmatrix}}$$

• **Obtendo as mesmas grandezas na base  $I$**

Para obter as mesmas grandezas na base  $I$ , alguns caminhos são possíveis:

- (1) A primeira alternativa é utilizar as matrizes de transformação de coordenadas nos resultados já obtidos:

$${}_{I}^I \mathbf{p}^P = \mathbf{T}_{\beta}^T \cdot {}_{S_1}^I \mathbf{p}^P \quad \rightarrow \quad {}_{I}^I \mathbf{p}^P = \mathbf{T}_{\beta}^T \cdot \mathbf{T}_{\theta}^T \cdot {}_{S_2}^I \mathbf{p}^P$$

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}^P &= \mathbf{T}_\beta^T \cdot {}_{S_1}\mathbf{v}^P \quad \rightarrow \quad {}^I\mathbf{v}^P = \mathbf{T}_\beta^T \cdot \mathbf{T}_\theta^T \cdot {}_{S_2}\mathbf{v}^P \\ {}^I\mathbf{a}^P &= \mathbf{T}_\beta^T \cdot {}_{S_1}\mathbf{a}^P \quad \rightarrow \quad {}^I\mathbf{a}^P = \mathbf{T}_\beta^T \cdot \mathbf{T}_\theta^T \cdot {}_{S_2}\mathbf{a}^P \end{aligned}$$

- (2) A segunda alternativa é transformar a descrição do vetor posição para uma descrição na base  $I$  e derivá-lo uma vez para obter a posição absoluta na base  $I$ , e uma segunda vez para obter a aceleração absoluta na base  $I$ :

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{p}^P &= \mathbf{T}_\beta^T \cdot \mathbf{T}_\theta^T \cdot {}_{S_2}\mathbf{p}^P \\ {}^I\mathbf{v}^P &= \left[ \frac{d}{dt} ({}^I\mathbf{p}^P) \right] \\ {}^I\mathbf{a}^P &= \left[ \frac{d}{dt} ({}^I\mathbf{v}^P) \right] \end{aligned}$$